

## ATENUACION DE ONDAS ELASTICAS CON BARRERAS DE PILOTES

JAVIER AVILES\*  
y  
FRANCISCO J. SANCHEZ-SESMA\*\*

*\*Escuela de Ingeniería Civil,  
Universidad Autónoma de Puebla,  
4 Sur 104. CP 72000, Puebla, MEXICO*

*\*\*Instituto de Ingeniería,  
Universidad Nacional Autónoma de México,  
Cd. Universitaria, Coyoacán, D.F., MEXICO*

### RESUMEN

Se presenta una solución analítica para resolver el problema de aislamiento de cimentaciones, de vibraciones generadas en su cercanía, mediante barreras de pilotes. El sistema de aislamiento está formado por una línea de pilotes elásticos y la excitación está dada por una fuente de ondas cilíndricas SV. El problema se formula bidimensionalmente como uno de difracción múltiple de ondas elásticas, los campos reflejados y refractados por los pilotes se construyen mediante expansiones de funciones de ondas cilíndricas. La solución exacta se obtiene al satisfacer idénticamente las condiciones de continuidad de desplazamientos y esfuerzos en las interfases suelo-pilote, con la ayuda del teorema de adición de Graf. Se presentan algunos resultados numéricos que muestran el comportamiento de barreras de pilotes como sistema de aislamiento, y se define un índice de transmisibilidad para medir su efectividad.

### SUMMARY

An analytical solution is presented to solve the problem of foundation isolation, from vibrations generated in the neighborhood, using barriers of piles. This isolation system is formed by a row of elastic piles and the excitation is given by a source of cylindrical SV waves. The problem is formulated in two dimensions as one of multiple diffraction of elastic waves, the diffracted and refracted fields by the piles are constructed as expansions of cylindrical wave functions. The exact solution is obtained satisfying in an exact form the continuity conditions of displacements and stresses at the soil-pile interfaces, with the aid of Graf's addition theorem. Some numerical results are presented which show the behavior of barriers of piles as isolation system, and a transmissibility index is defined to measure their effectivity.

Recibido: Septiembre 1987

## INTRODUCCION

Con el objeto de abatir las vibraciones en estructuras, debidas a la propagación de ondas elásticas generadas por fuentes excitadoras, a menudo se recurre al uso de barreras aisladoras<sup>1</sup>. En varias ocasiones se han empleado trincheras u obstrucciones como barreras para ondas. Sin embargo, no siempre se ha obtenido el éxito deseado; a veces su efecto ha sido contrario a lo esperado o poco significativo. Estas dificultades ya han sido expuestas por Barkan<sup>2</sup>; al parecer se han debido al poco conocimiento de la teoría de propagación de ondas elásticas en presencia de una barrera. Los estudios teóricos que existen sobre el problema son insuficientes para resolverlo completamente; por tanto, es necesario realizar un análisis teórico del mismo con el fin de generar criterios racionales para diseño.

Tradicionalmente la solución al problema ha sido excavar trincheras; sin embargo, su uso está limitado por la inestabilidad de sus paredes en suelos blandos, así como por la gran profundidad requerida para el caso de incidencia de ondas de Rayleigh con longitud de onda grande. Una alternativa al empleo de trincheras es usar pilotes, los cuales están menos limitados por la profundidad de desplante. Esta alternativa ha sido estudiada experimentalmente por Woods, Barnett y Sagesser<sup>3</sup> y Liao y Sangrey<sup>4</sup>, y analíticamente por Avilés y Sánchez-Sesma<sup>5</sup>.

El concepto de aislamiento de cimentaciones mediante barreras de pilotes se basa en el fenómeno de difracción, el cual tiene lugar si una obstrucción se interpone en la trayectoria de la propagación de las ondas. La energía de una fuente excitadora que causa vibraciones en la cimentación de una estructura, se transmite a través del suelo mediante ondas. Esta energía puede ser fraccionada si se incrustan obstrucciones que generen un fenómeno de difracción múltiple. Las interferencias destructivas y constructivas de las ondas producirán reducciones y amplificaciones del movimiento, respectivamente.

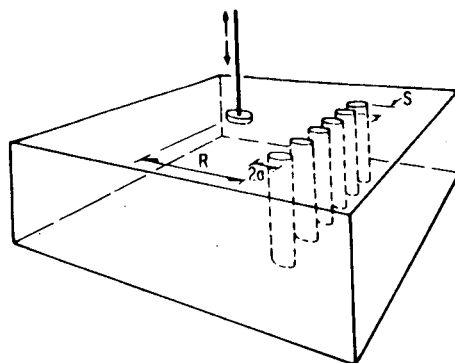


Figura 1.

En este trabajo se presenta una solución analítica al problema de aislamiento de cimentaciones, usando como sistema de aislamiento barreras para ondas formadas por

una línea de pilotes elásticos (Figura 1). La solución exacta es para un modelo teórico bidimensional formado por pilotes de longitud infinita y sección transversal circular, incrustados en un espacio elástico lineal, isótropo y homogéneo; la excitación está dada por una fuente de ondas cilíndricas SV.

El problema se formula como uno de difracción múltiple<sup>5</sup> y se resuelve con un método de frontera<sup>6</sup>. El método de solución que se propone consiste en la generación del campo total mediante la superposición del campo incidente y los campos reflejados por los pilotes, usando el teorema de adición de Graf<sup>7</sup> para representar el campo total con respecto a cualquier referencia. Los campos reflejados y refractados por los pilotes se construyen mediante expansiones de funciones de ondas cilíndricas, las cuales son soluciones base de la ecuación reducida de onda bidimensional y forman un conjunto completo. Como las soluciones base contienen funciones trigonométricas, al imponer las condiciones de frontera del problema se recurre a las propiedades de ortogonalidad de dichas funciones para generar sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas, los cuales definen los coeficientes indeterminados de las expansiones. Numéricamente los sistemas infinitos no pueden ser resueltos; una aproximación de los campos reflejados y refractados se obtiene truncando las expansiones que los definen, lo cual da origen a sistemas de ecuaciones algebraicas finitos.

En el modelo se considera solamente la incidencia de ondas SV, ya que lo que se pretende es establecer la metodología de análisis para ondas de cuerpo; para el caso de ondas P y SH el tratamiento será el mismo. Finalmente, se presentan resultados numéricos que muestran el comportamiento de barreras de pilotes como sistema de aislamiento; para medir su efectividad se define un índice de transmisibilidad que es función del radio de los pilotes y la separación entre pilotes.

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

## FORMULACION DEL PROBLEMA

En un espacio elástico lineal, isótropo y homogéneo el desplazamiento  $w$  en la dirección  $z$  (Figura 2), que genera la propagación de ondas armónicas SV, satisface la ecuación reducida de onda o ecuación de Helmholtz<sup>8</sup>:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w = 0 \quad (1)$$

donde  $x, y$  = coordenadas cartesianas,  $k = \frac{\omega}{\beta}$  = número de onda cortante,  $\omega$  = frecuencia de excitación,  $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  = velocidad de propagación de ondas de cortante,  $\mu$  = módulo de cortante del medio y  $\rho$  = densidad del medio.

Empleando el principio de superposición, el campo total en el suelo  $w_s$  se puede construir como:

$$w_s = w^i + \sum_{j=1}^P w_j^r \quad (2)$$

donde  $w^i$  = campo incidente (solución de campo libre),  $w_j^r$  = campo reflejado por el

$j$ -ésimo pilote y  $P =$  número de pilotes.

Si la excitación consiste en una onda cilíndrica SV de intensidad  $w_0$ , generada por una fuente central localizada a una distancia  $R$  de la barrera (Figura 2), la solución radial (simetría axial) de la ecuación 1, en el sistema de coordenadas cilíndricas  $(r_0, \theta_0)$ , está dada por<sup>8</sup>:

$$w^i(r_0, \theta_0) = w_0 H_0^{(2)}(k_s r_0) e^{i\omega t} \quad (3)$$

donde  $H_0^{(2)}(\cdot) =$  función de Hankel de segunda especie y orden 0,  $i = \sqrt{-1}$  y  $t =$  tiempo; el subíndice  $s$  indica suelo. En lo sucesivo el factor tiempo  $e^{i\omega t}$  se sobrentiende a lo largo del trabajo.

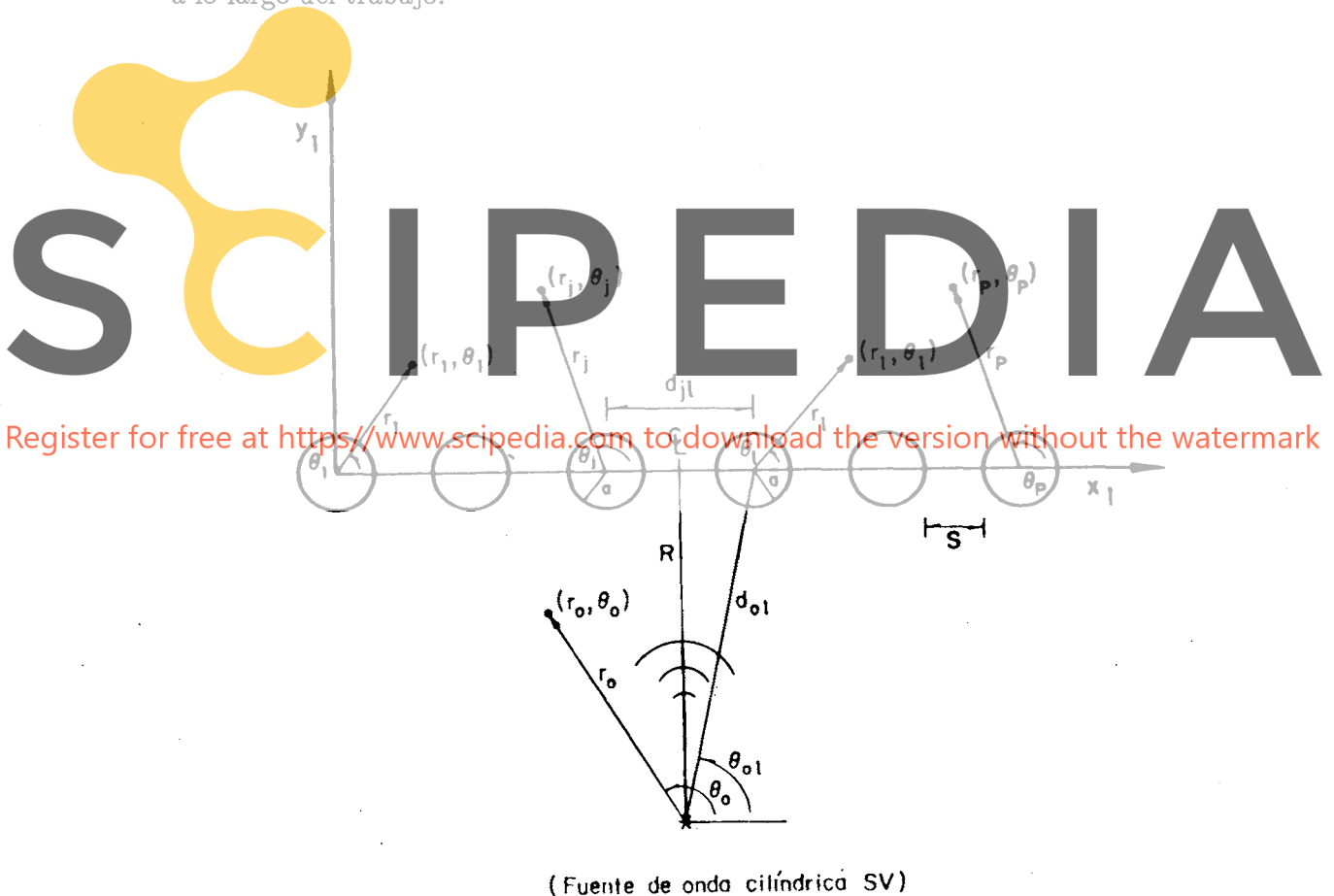


Figura 2.

Aplicando el método de separación de variables a la ecuación 1, se encuentra que el campo reflejado por el  $j$ -ésimo pilote se puede expresar en el sistema de coordenadas  $(r_j, \theta_j)$  como<sup>6</sup>:

$$w_j^r(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(k_s r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(k_s r_j) \operatorname{senn} \theta_j \quad (4)$$

donde  $A_n^j, B_n^j$  = coeficientes complejos indeterminados que se determinan al satisfacer las condiciones de frontera. Las funciones  $H_n^{(2)}(k_s r_j) \cos n\theta_j$  y  $H_n^{(2)}(k_s r_j) \operatorname{senn} \theta_j$  forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación reducida de onda en regiones no acotadas<sup>6</sup>, y satisfacen la condición de Sommerfeld<sup>9</sup> de irradiación al infinito.

Por tratarse de pilotes elásticos se refracta parte de la onda incidente, generándose una onda estacionaria dentro de cada pilote. Resolviendo la ecuación 1 con el método de separación de variables, se encuentra que el campo refractado en el  $j$ -ésimo pilote se puede expresar en el sistema de coordenadas  $(r_j, \theta_j)$  como<sup>6</sup>:

$$w_j(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j J_n(k_p r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^j J_n(k_p r_j) \operatorname{senn} \theta_j \quad (5)$$

donde  $C_n^j, D_n^j$  = coeficientes complejos indeterminados que se determinan al satisfacer las condiciones de frontera y  $J_n(\cdot)$  = función de Bessel de primera especie y orden  $n$ ; el subíndice  $p$  indica pilote. Las funciones  $J_n(k_p r_j) \cos n\theta_j$  y  $J_n(k_p r_j) \operatorname{senn} \theta_j$  forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación reducida de onda en regiones acotadas<sup>6</sup>.

Los coeficientes  $A_n^j, B_n^j, C_n^j$  y  $D_n^j$  que definen la solución del problema se obtienen al satisfacer las condiciones de frontera. Suponiendo adhesión perfecta, las condiciones de frontera que se deben satisfacer en las interfases suelo-pilote son de continuidad de desplazamientos y esfuerzos, esto es:

$$w_s(r_l, \theta_l) \Big|_{r_l=a} = w_l(r_l, \theta_l) \Big|_{r_l=a} \quad 0 \leq \theta_l \leq 2\pi \quad y \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (6)$$

$$\left[ \mu_s \frac{\partial w_s(r_l, \theta_l)}{\partial r_l} \right] \Big|_{r_l=a} = \left[ \mu_p \frac{\partial w_l(r_l, \theta_l)}{\partial r_l} \right] \Big|_{r_l=a} \quad 0 \leq \theta_l \leq 2\pi \quad y \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (7)$$

donde  $a$  = radio de los pilotes.

## SOLUCION

Para obtener la solución del problema es necesario imponer las condiciones de frontera en cada uno de los pilotes, para lo cual conviene representar el campo total, ecuación 2, con respecto a un sistema de coordenadas cualquiera  $(r_l, \theta_l)$ . Para esto, las ecuaciones 3 y 4 se deben referir al sistema  $l$  usando el teorema de adición de Graf; en el Apéndice se presentan las fórmulas explícitas para llevar a cabo las transformaciones de coordenadas. Así, el campo total  $w_s$  referido al sistema de coordenadas  $(r_l, \theta_l)$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
w_s(r_l, \theta_l) = & w_0 \left[ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) \cos m \theta_{0l} J_m(k_s r_l) \cos m \theta_l + \right. \\
& 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) \sin m \theta_{0l} J_m(k_s r_l) \sin m \theta_l \Big] + \\
& (1 - \delta_{l1}) \sum_{j=1}^{l-1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon_m}{2} K_m^n(k_s d_{jl}) J_m(k_s r_l) \cos m \theta_l + \right. \\
& \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m L_m^n(k_s d_{jl}) J_m(k_s r_l) \sin m \theta_l \Big] + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} A_m^l H_m^{(2)}(k_s r_l) \cos m \theta_l + \sum_{m=1}^{\infty} B_m^l H_m^{(2)}(k_s r_l) \sin m \theta_l + \\
& (1 - \delta_{lP}) \sum_{j=l+1}^P \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} K_m^n(k_s d_{jl}) J_m(k_s r_l) \cos m \theta_l + \right. \\
& \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j \sum_{m=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{jl}) J_m(k_s r_l) \sin m \theta_l \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

donde

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$K_m^n(\cdot) = H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot) \tag{9}$$

$$L_m^n(\cdot) = -H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot) \tag{10}$$

$\varepsilon_m$  = factor de Neumann ( $\varepsilon_0 = 1$  y  $\varepsilon_m = 2$ ,  $m \geq 1$ ),  $d_{jl}$  = distancia centro a centro entre el  $j$ -ésimo pilote y el  $l$ -ésimo pilote,  $d_{0l}$  = distancia entre la fuente y el  $l$ -ésimo pilote,  $\theta_{0l}$  = ángulo entre la fuente y el  $l$ -ésimo pilote (Figura 2) y  $\delta_{lj}$  = delta de Kronecker (=1 si  $l = j$ ; =0 si  $l \neq j$ ).

Sustituyendo las ecuaciones 5 y 8 en las ecuaciones 6 y 7 y empleando las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, es posible obtener cuatro sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas que definen los coeficientes  $A_n^j$ ,  $B_n^j$ ,  $C_n^j$  y  $D_n^j$ . Sin embargo, como no interesa la solución en los pilotes sino en el suelo, se pueden eliminar los coeficientes  $C_n^j$  y  $D_n^j$  obteniéndose dos sistemas de ecuaciones que tienen la siguiente forma:

$$(1 - \delta_{l1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(k_s d_{jl}) A_n^j + \frac{2}{\varepsilon_m} \left[ \frac{H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a)} - \frac{F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{F_m J_m(k_s a)} \right] A_m^l +$$

$$+ (1 - \delta_{lP}) \sum_{j=l+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(k_s d_{jl}) A_n^j = \quad (11)$$

$$= -2w_0(-1)^m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) \cos m\theta_{0l}, \quad l = 1, 2, \dots, P \quad y \quad m = 0, 1, \dots, \infty$$

$$(1 - \delta_{l1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{jl}) B_n^j + \left[ \frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] B_m^l +$$

$$+ (1 - \delta_{lP}) \sum_{j=l+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(k_s d_{jl}) B_n^j = \quad (12)$$

$$= -2w_0(-1)^m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) \sin m\theta_{0l}, \quad l = 1, 2, \dots, P \quad y \quad m = 1, 2, \dots, \infty$$

$$F_m = \sqrt{\frac{\mu_p \rho_p}{\mu_0 \rho_0}} \frac{J_m'(k_p a)}{J_m(k_p a)} \quad (13)$$

la prima indica derivada con respecto al argumento.

Resolviendo los sistemas de ecuaciones 11 y 12 el problema está resuelto. Numéricamente dichos sistemas no pueden ser resueltos exactamente; una aproximación de la solución se obtiene al reducirlos a dimensión finita, truncando adecuadamente los órdenes  $m, n$  tal que la solución converja.

Analizando los sistemas de ecuaciones resultantes, se puede observar que el tipo de difractor, pilote elástico o rígido y cavidad, modifica sólo los coeficientes diagonales. Así, cuando  $\mu_p = \infty$  se tiene el caso límite de pilotes rígidos y los coeficientes diagonales de las ecuaciones 11 y 12 se reducen a:

$$\frac{2}{\varepsilon_m} \left[ \frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] \Big|_{\mu_p=\infty} = \frac{2H_m^{(2)}(k_s a) - 4\delta_{m0}(\rho_s/\rho_p)H_1^{(2)}(k_s a)/(k_s a)}{\varepsilon_m J_m(k_s a) - 2\delta_{m0}(\rho_s/\rho_p)J_1(k_s a)/(k_s a)} \quad (14)$$

$$\left[ \frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] \Big|_{\mu_p=\infty} = \frac{H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m(k_s a)} \quad (15)$$

Cuando  $\mu_p = 0$  se tiene el caso límite de cavidades y los coeficientes diagonales de las ecuaciones 11 y 12 se reducen a:

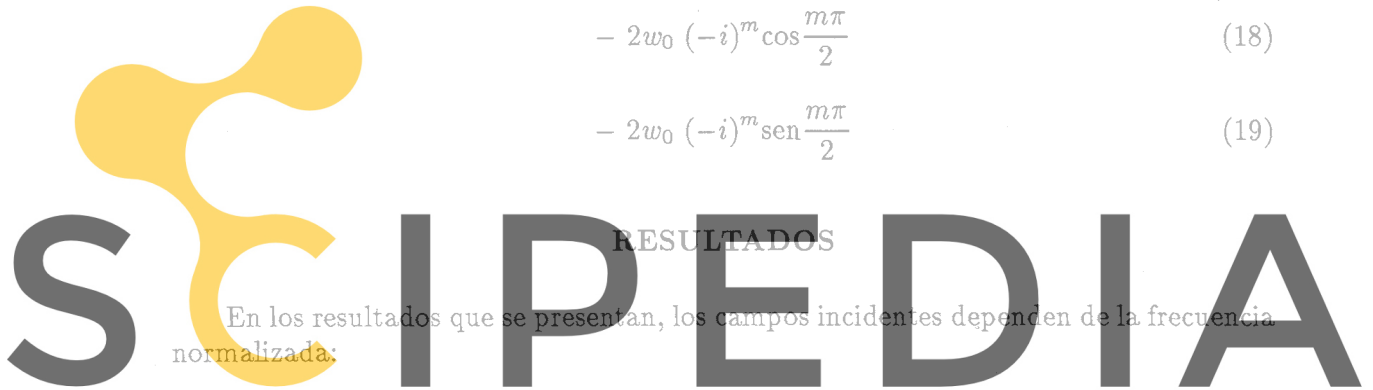
$$\frac{2}{\varepsilon_m} \left[ \frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] \Big|_{\mu_p=0} = \frac{2}{\varepsilon_m} \frac{H_m^{(2)'}(k_s a)}{J_m'(k_s a)} \quad (16)$$

$$\left[ \frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] \Big|_{\mu_p=0} = \frac{H_m^{(2)'}(k_s a)}{J_m'(k_s a)} \quad (17)$$

Repetiendo el mismo proceso de solución para el caso de incidencia normal de una onda plana, es posible llegar a las ecuaciones 11 y 12 con los mismos coeficientes pero diferentes términos independientes. Así, para incidencia normal de ondas planas los términos independientes de las ecuaciones 11 y 12 resultan ser, respectivamente:

$$-2w_0 (-i)^m \cos \frac{m\pi}{2} \quad (18)$$

$$-2w_0 (-i)^m \sin \frac{m\pi}{2} \quad (19)$$



$$\eta_s = \frac{a\omega}{\pi\lambda_s} = \frac{2a}{\lambda_s} \quad (20)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

donde  $\lambda_s$  = longitud de la onda incidente. Por definición, la frecuencia normalizada es la relación entre el diámetro de los pilotes y la longitud de la onda incidente. Los cálculos se realizaron usando 10 términos de los desarrollos infinitos, siendo suficientes para obtener soluciones estables en el rango de frecuencias considerado. Las barreras analizadas están formadas de 9 obstrucciones.

En la Figura 3 se presentan magnitudes normalizadas del desplazamiento  $w_s$  a lo largo de la recta  $y/a = 150$  para diferentes separaciones entre pilotes. La fuente de ondas cilíndricas se encuentra localizada a una distancia  $R/a = 350$ , la frecuencia normalizada es  $\eta_s = 0.4$  y las relaciones mecánicas son  $\mu_p/\mu_s = 500$  y  $\rho_p/\rho_s = 1.333$ . En estos resultados se puede observar el comportamiento de barreras de pilotes como sistema de aislamiento: generación de abatimientos que resultan ser mayores en el centro de la barrera, comportándose ésta como una sola obstrucción y no como un conjunto de obstáculos independientes.

La Figura 4 muestra magnitudes normalizadas del desplazamiento  $w_s$  a lo largo de las rectas  $x/a = 0, 3.5, 7, 10.5, 14$ . La fuente de ondas cilíndricas se encuentra localizada a una distancia  $R/a = 200$ , la frecuencia normalizada es  $\eta_s = 0.4$ , se tiene una separación entre pilotes  $S/a = 1.5$ , los pilotes son rígidos y la relación de densidades es  $\rho_p/\rho_s = 1.333$ . Estos resultados muestran con detalle la variación del campo abatido; se puede apreciar que a distancias cercanas de la barrera el aislamiento es irregular y poco significativo, mientras que a distancias lejanas ocurre totalmente lo contrario.



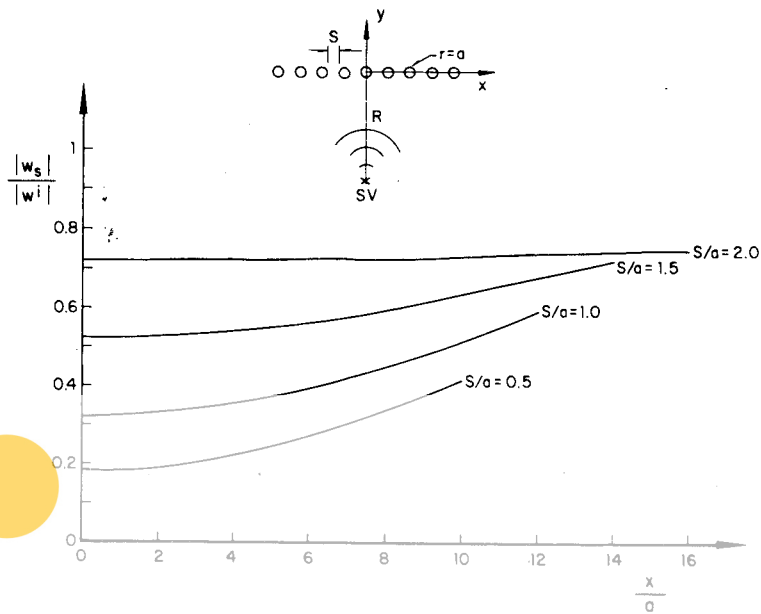


Figura 3.

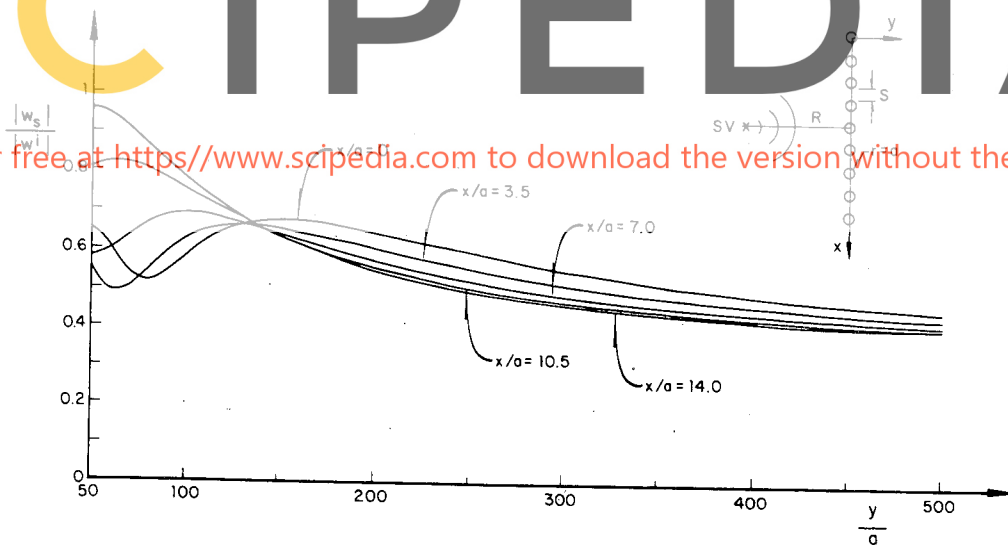


Figura 4.

En la Figura 5 se presentan magnitudes normalizadas del desplazamiento  $w_s$  a lo largo de las rectas  $x/a = 0, 3.5, 7, 10.5, 14$  para una barrera formada por cavidades. La fuente de ondas cilíndricas se encuentra localizada a una distancia  $R/a = 100$ , la frecuencia normalizada es  $\eta_s = 0.4$  y se tiene una separación entre pilotes  $S/a = 1.5$ . En estos resultados se puede ver que el comportamiento de barreras de cavidades es semejante al de barreras de pilotes, pero con niveles de efectividad bajos.

Los resultados que aparecen en la Figura 6 muestran la influencia de la rigidez de

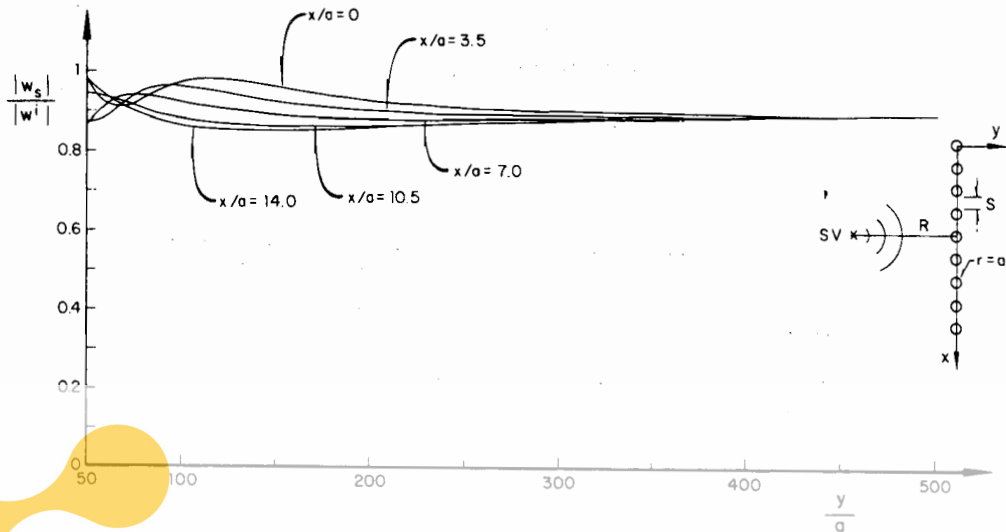


Figura 5.

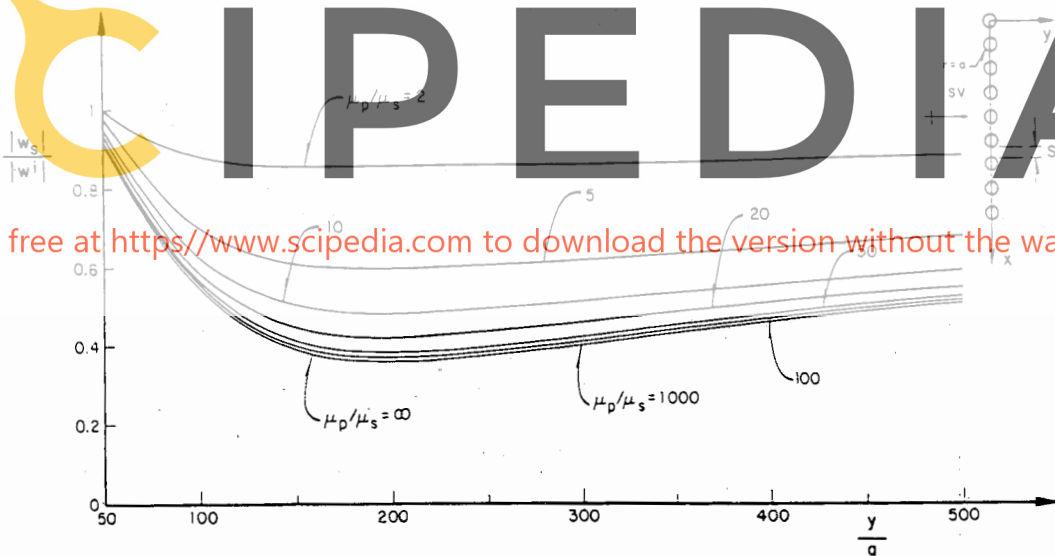


Figura 6.

los pilotes en la efectividad de la barrera. Las curvas que se presentan corresponden a magnitudes normalizadas del desplazamiento  $w_s$  a lo largo de la recta  $x/a = 14$  para diferentes relaciones de rigideces. Inciden normalmente ondas planas con una frecuencia normalizada  $\eta_s = 0.4$ , la separación entre pilotes es  $S/a = 1.5$  y se tiene una relación de densidades  $\rho_p/\rho_s = 1.333$ . Se puede observar que para casos reales la variación de la relación de rigideces no influye considerablemente en la efectividad de la barrera.

El efecto de la curvatura del frente de onda incidente se muestra en los resultados que aparecen en la Figura 7. Las curvas que se presentan corresponden a magnitudes normalizadas del desplazamiento  $w_s$  a lo largo de la recta  $x/\lambda_s = 2.6$  para diferentes

pósiciones de la fuente de ondas cilíndricas. La frecuencia normalizada es  $\eta_s = 0.4$ , se tiene una separación entre pilotes  $S/\lambda_s = 0.25$ , los pilotes son rígidos y la relación de densidades es  $\rho_p/\rho_s = 1.333$ . Se puede comprobar que si la distancia  $R$  a la que se encuentra localizada la fuente es grande el campo abatido tiende al correspondiente a ondas planas, ya que a grandes distancias de la fuente el frente de onda cilíndrico se comporta como plano.

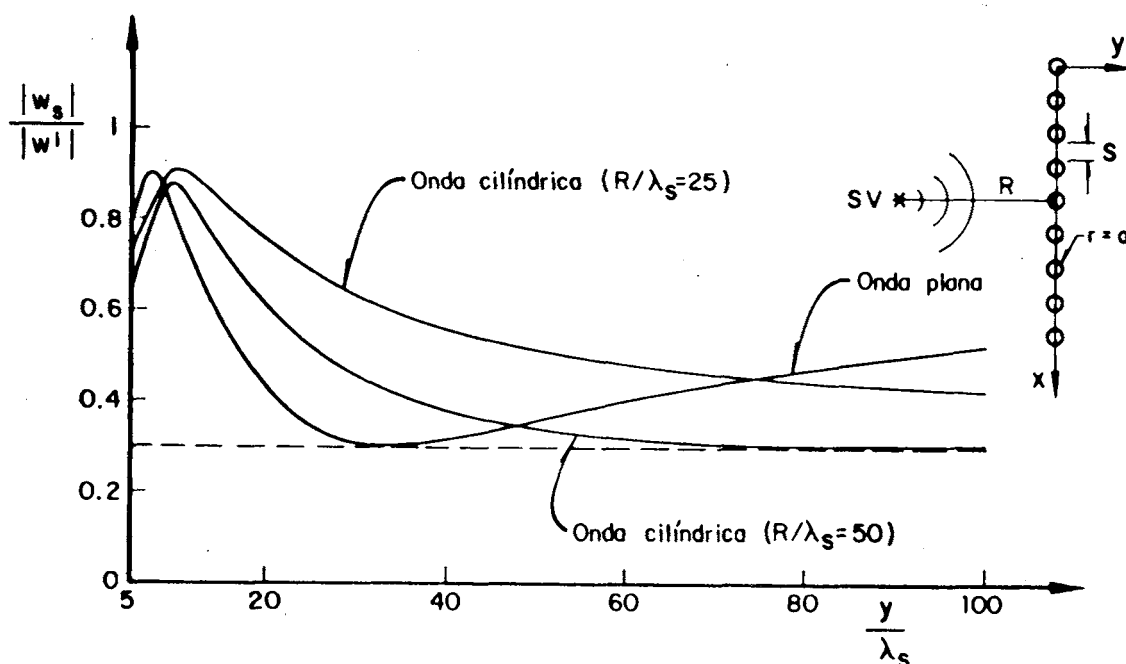


Figura 7.

Para medir la efectividad de barreras de pilotes como sistema de aislamiento, se define un índice de transmisibilidad, función de la separación entre pilotes y el radio de los pilotes, como:

$$IT(S, a) = \frac{|w^t|}{|w^i|} \quad (21)$$

donde  $w^t$  = campo transmitido. Para hacer que  $IT$  sea independiente de la posición,  $w^t$  se define como el valor mínimo del campo  $w_s$ . De acuerdo con su definición el índice de transmisibilidad variará entre 0 y 1. Cuando la barrera permita que el campo incidente pase totalmente,  $|w^t| = |w^i|$  y entonces  $IT = 1$ ; y cuando impida totalmente el paso del campo incidente,  $|w^t| = 0$  y por lo tanto  $IT = 0$ .

En la Figura 8 se presentan índices de transmisibilidad para diferentes frecuencias normalizadas. Se tiene incidencia normal de ondas planas, pilotes rígidos y una relación de densidades  $\rho_p/\rho_s = 1.333$ . En estos resultados se puede apreciar la influencia del radio de los pilotes y la separación entre pilotes en la efectividad de la barrera definida

como  $E = 1 - IT$ : cuando el radio de los pilotes aumenta o la separación entre pilotes se reduce, la efectividad de la barrera se incrementa.

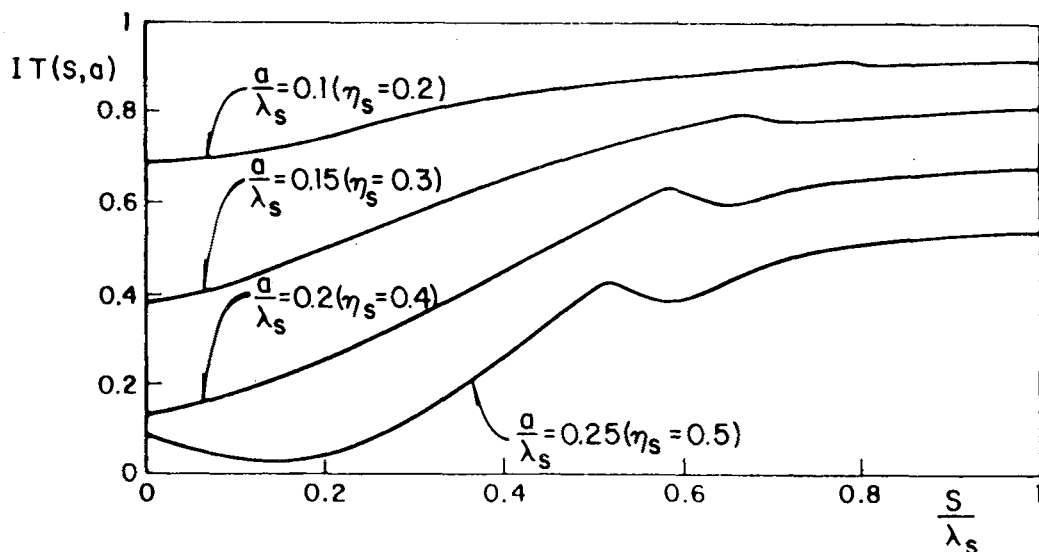


Figura 8.

Las curvas de índices de transmisibilidad pueden ser de gran ayuda para el diseño racional de barreras de pilotes, ya que conocida la longitud de la onda incidente y definida la efectividad deseada, se propone el radio de los pilotes o la separación entre pilotes, se entra a las curvas de índices de transmisibilidad y queda definida la variable de diseño. Por ejemplo, supóngase que se tiene un martinete con  $\omega/2\pi = 40$  Hz, una arcilla con  $\rho_s = 0.18$  ton-seg<sup>2</sup>/m<sup>4</sup> y  $\mu_s = 1200$  ton/m<sup>2</sup>, pilotes rígidos de concreto con  $\rho_p = 0.24$  ton-seg<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>, y se desea una efectividad de la barrera  $E = 0.5$ . Entonces, de acuerdo con los datos:  $\rho_p/\rho_s = 1.333$ ,  $\beta_s = \sqrt{\mu_s/\rho_s} = 82$  m/seg,  $\lambda_s = \frac{2\pi}{\omega}\beta_s = 2$  m y, proponiendo  $a = 0.3$  m,  $\eta_s = 2a/\lambda_s = 0.3$ . Con estos valores se entra a las curvas de índices de transmisibilidad y se encuentra  $S/\lambda_s = 0.25$ , con lo que  $S = 0.5$  m.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado una solución analítica al problema de aislamiento de cimentaciones mediante barreras de pilotes. El problema se modeló bidimensionalmente y se formuló como uno de difracción múltiple de ondas elásticas. Se presentaron resultados numéricos que muestran el comportamiento de barreras de pilotes como sistema de aislamiento. Se definió un índice de transmisibilidad, en función del radio de los pilotes y la separación entre pilotes, para medir la efectividad del sistema de aislamiento.

Los resultados están sujetos a salvedades debido a que se resolvió un problema ideal; convendría hacer experimentos en modelos o prototipos a escala a fin de calibrar la solución obtenida. Las curvas de índices de transmisibilidad muestran que el uso de barreras aisladoras formadas por una línea de pilotes es adecuado sólo para el caso

de longitudes de onda pequeñas; sería de interés estudiar el caso de líneas de pilotes alternados para longitudes de onda grandes.

### APENDICE.-TEOREMA DE ADICION DE GRAF

En este trabajo se emplea el teorema de adición de Graf<sup>7</sup>. Las ondas generadas por la fuente de ondas cilíndricas se pueden representar en el sistema de coordenadas  $(r_l, \theta_l)$  como:

$$H_0^{(2)}(k_s r_0) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) J_m(k_s r_l) \times$$

$$(\cos m \theta_{0l} \cos m \theta_l + \sin m \theta_{0l} \sin m \theta_l) \quad (22)$$

Las ondas reflejadas por el  $j$ -ésimo pilote se pueden representar en el sistema de coordenadas  $(r_l, \theta_l)$  como:

$$H_n^{(2)}(k_s r_j) \frac{\cos n \theta_j}{\sin n \theta_j} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m J_m(k_s r_l) \frac{K_m^n(k_s d_{jl}) \cos m \theta_l}{L_m^n(k_s d_{jl}) \sin m \theta_l} \quad (23)$$

si  $j < l$   
o

$$H_n^{(2)}(k_s r_j) \frac{\cos n \theta_j}{\sin n \theta_j} = \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(k_s r_l) \frac{K_m^n(k_s d_{jl}) \cos m \theta_l}{L_m^n(k_s d_{jl}) \sin m \theta_l} \quad (24)$$

si  $j > l$ .

### REFERENCIAS

1. F.E. Richart Jr., J.R. Hall Jr. y R.D. Woods, "Vibrations of Soils and Foundations", Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, (1970).
2. D.D. Barkan, "Dynamics of Bases and Foundations", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, (1962).
3. R.D. Woods, N.E. Barnett y R. Sagesser, "Holography-A New Tool for Soil Dynamics", "Journal of the Geotechnical Engineering Division", ASCE, Vol. 100, pp. 1231-1247, (1974).
4. S. Liao y D.A. Sangrey, "Use of Piles as Isolation Barriers", "Journal of the Geotechnical Engineering Division", ASCE, Vol. 104, pp. 1139-1152, (1978).
5. J. Avilés y F.J. Sánchez-Sesma, "Piles as Barriers for Elastic Waves", "Journal of the Geotechnical Engineering Division", ASCE, Vol. 109, pp. 1133-1146, (1983).

6. F.J. Sánchez-Sesma, I. Herrera y J. Avilés, "A Boundary Method for Elastic Wave Diffraction: Application to Scattering of SH Waves by Surface Irregularities", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. **72**, pp. 473-490, (1982).
7. G.N. Watson, "*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*", Cambridge University Press, Londres, (1966).
8. J.D. Achenbach, "*Wave Propagation in Elastic Solids*", North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1973).
9. A. Sommerfeld, "*Partial Differential Equations in Physics*", Academic Press, Nueva York, (1949).